PROCEEDINGS OF IAM, V.8, N.2, 2019, pp.211-228

МЕТОД ДИСКРЕТИЗАЦИИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ЖИДКИМ ДЕМПФЕРОМ [1]

Н.А. Алиев[1], Н.И. Велиева[1,3], К. Г. Касимова[2] , А.Ф.Расулзаде[3]

[1]Институт Прикладной Математики, БГУ, Баку, Азербайджан
[2] Азербайджанский Педагогический Университет, Баку, Азербайджан
[3] Азербайджанский Технический Университет, Баку, Азербайджан

E-mail: nailavi@rambler.ru, resulzadeaynur@gmail.com

Резюме. Рассматриваются колебательные системы внутри Ньютоновской жидкости, где вопреки классическому подходу математическая модель демпфера имеет производные дробного порядка. Из-за не локальности, здесь определение дробной производной от непрерывного варианта впервые переходит к дискретной модели колебательной системы и описывается движение классическим разностным уравнением. С помощью этой дискретной модели приводится алгоритм (на основе статистических данных) определения порядка жидкого демпфера.

Ключевые слова: колебательная система, жидкий демпфер, дискретная модель, дробная производная, статистические данные, метод наименьших квадратов.

AMS Subject Classification: 49J15, 49J35.

1. Введение.

Как известно, дробные производные играют важную роль при решении многих прикладных задач, как при добыче нефти штанго-насосными установками [32], памяти определения металла [2], многих колебательных систем внутри жидкости [17-22] и др. Входящие параметры в этих практических задачах, кроме порядка дробной производной [3,4,16-22,27], обычно задаются инженерами, а определение порядка представляет трудности [26]. Поэтому нахождение предлагается через статистические данные конечных условий [8,10] с использованием метода наименьших квадратов [26]. Там же, нахождение порядка дробной производной сводится к решению сложных, существенно нелинейных алгебраических уравнений, а вычисления конечных значений фазовой координаты не подчинятся общему закону разностных уравнений [12]. Такая неординарность не позволяет далее рассмотреть задачи выбора программных движений и управлений [9,24,31], построение соответствующих оптимальных регуляторов [5-7,9,11-15,28]и т. д.

[1] Работа была представлена на семинаре Института Прикладной Математики 11.06.2019

В данной работе рассматривается колебательная система с жидкими демпферами. Из-за того, что движение в заданном интервале времени описывается то дифференциальным, то конечно-разностным уравнением, требуется дискретизировать [1,31] заданного дифференциального уравнения с дробными производными. Такая дискретизация не позволяет представить полученные конечно-разностные соотношения в классическом виде [7]. Поэтому нужно представить полученные дискретизации так, чтобы далее можно было бы решать задачу определения порядка дробной производной, ставить задачи определения программных траекторий и возмущений коэффициентов соответствующего регулятора.

На основе вышеуказанного приводятся стационарные конечно-разностные уравнения, где (i+1) такт зависит от i и 0 тактов. Такое представление позволяет на основе заданных статистических данных конечных состояний фазового вектора привести соотношение, позволяющее найти степень дробных производных, зависящих от к ρ, f_m.

Результаты иллюстрируется конечным примером, где находится порядок дробной производной, также моделируется движение колебательных систем и далее приводится сравнение.

2. Дискретная модель системы

Математическая модель демпфера описывается дифференциальным уравнением дробного порядка:

$$y''(x) + aD^{\alpha}y(x) + by(x) = f(x), \quad x > 0, \quad \alpha \in (1,2) \tag{1}$$

с начальным условием

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = y_{10} \end{cases} \tag{2}$$

где a, b заданные вещественные постоянные числа, $f(x) -$ вещественная непрерывная функция, $\alpha \in (1,2)$. По определению Римана-Лиувилля имеем:

$$D^{\alpha}y(x) = DD^{\alpha-1}y(x) = DD\int_0^x \frac{(x-t)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}y(t)dt = -D^2\int_0^x y(t)d_t\frac{(x-t)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)!} =$$
$$-D^2\left[y(t)\frac{(x-t)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)!}\Big|_{t=0}^{x} - \int_0^x y'(t)\frac{(x-t)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)!}dt\right] = D^2\int_0^x y'(t)\frac{(x-t)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)!}dt\,,$$

Учитывая, что $(2-\alpha) > 0$ и $y(0) = 0$, тогда дифференцируя интеграл один раз, получим:

$$D^{\alpha}y(x) = D\int_0^x y'(t)\frac{(x-t)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}dt = -D\int_0^x y'(t)\,d_t\frac{(x-t)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)!} =$$
$$-D\left[y'(t)\frac{(x-t)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)!}\Big|_{t=0}^{x} - \int_0^x y''(t)\frac{(x-t)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)!}dt\right] = y_{10}\frac{x^{(1-\alpha)}}{(1-\alpha)!} +$$
$$+\int_0^x y''(t)\frac{(x-t)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}dt \quad . \tag{3}$$

Преобразуем $y(x)$ следующим образом

$$y(x) = \int_0^x y'(t)dt + y(0) = \int_0^x dt\left[\int_0^t y''(\tau)d\tau + y'(0)\right] = \int_0^x dt\int_0^t y''(\tau)d\tau +$$
$$+y_{10}x = \int_0^x y''(\tau)d\tau\int_\tau^x dt + y_{10}x = \int_0^x (x-\tau)\,y''(\tau)d\tau + y_{10}x =$$
$$\int_0^x (x-t)\quad y''(t)dt + y_{10}x \tag{4}$$

Подставляя (3) и (4) в (1), имеем

$$y''(x) + ay_{10}\frac{x^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + a\int_0^x y''(t)\frac{(x-t)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}dt + b\int_0^x (x-t)y''(t)\,dt$$
$$+ by_{10}x = f(x),$$

или же

$$y''(x) + \int_0^x K_\alpha(x-t)y''(t)\,dt = F(x) \quad x > 0, \tag{5}$$

где

$$K_\alpha(x-t) = a\frac{(x-t)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + b(x-t) \ , \tag{6}$$

$$F(x) \ = f(x) - \left[a\frac{x^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + bx\right]y_{10} \tag{7}$$

Теперь, заменяя *x* через x_n, $y''(x) \approx \frac{y_{n+2}-2y_{n+1}+y_n}{h^2}$, $\int_0^x K_\alpha(x-t)y''(t)\,dt \approx h\sum_{k=0}^{n-1}K_\alpha(x_n-x_k)\frac{y_{k+2}-2y_{k+1}+y_k}{h^2}$, $a, F(x) = F(x_n) = F_n$

из (5) получим следующее разностное уравнение

$$\frac{y_{n+2}-2y_{n+1}+y_n}{h^2} + h\sum_{k=0}^{n-1}K_\alpha(x_n-x_k)\frac{y_{k+2}-2y_{k+1}+y_k}{h^2} = F_n$$

или же

$$y_{n+2} = 2y_{n+1} - y_n - h\sum_{k=0}^{n-1}\left[a\frac{(x_n-x_k)^{(1-\alpha)}}{(1-\alpha)!} + b(x_n-x_k)\right](y_{k+2} - 2y_{k+1} +$$
$$+y_k) + h^2\left\{f_n - \left[a\frac{{x_n}^{(1-\alpha)}}{(1-\alpha)!} + bx_n\right]y_{10}\right\}. \tag{8}$$

Отделяя (8) для четного и нечетного индекса, имеем:

$$y_{2n} = 2y_{2n-1} - y_{2n-2} - h\sum_{k=0}^{2n-3}\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_k)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + b(x_{2n-2}-x_k)\right]y_{k+2} +$$
$$+2h\sum_{k=0}^{2n-3}\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_k)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + b(x_{2n-2}-x_k)\right]y_{k+1} - h\sum_{k=0}^{2n-3}\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_k)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} +\right.$$
$$\left.+b(x_{2n-2}-x_k)\right]y_k + h^2\left\{f_{2n-2} - \left[a\frac{x_{2n-2}{}^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + +bx_{2n-2}\right]y_{10}\right\} \quad ,$$

$$y_{2n+1} = 2y_{2n} - y_{2n-1} - h\sum_{k=0}^{2n-2}\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_k)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + b(x_{2n-1}-x_k)\right]y_{k+2} +$$
$$+2h\sum_{k=0}^{2n-2}\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_k)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + b(x_{2n-1}-x_k)\right]y_{k+1} - h\sum_{k=0}^{2n-2}\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_k)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} +\right.$$
$$\left.+b\,(x_{2n-1}-x_k)\right]y_k + h^2\left\{f_{2n-1} - \left[a\frac{x_{2n-1}{}^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + bx_{2n-1}\right]y_{10}\right\} \quad ,$$

или

$$y_{2n} = \left\{2 - h\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2n-3})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + b(x_{2n-2}-x_{2n-3})\right]y_{2n-1}\right\} + \left\{-1 -\right.$$
$$-h\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2n-4})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + b(x_{2n-2}-x_{2n-4})\right] + 2h\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2n-3})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} +\right.$$
$$\left.\left.+b(x_{2n-2}-x_{2n-3})\right]\right\}y_{2n-2} - h\sum_{k=0}^{2n-5}\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_k)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + +b(x_{2n-2} -\right.$$
$$\left.-x_k)\right]y_{k+2} + 2h\sum_{k=0}^{2n-4}\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_k)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + b(x_{2n-2}-x_k)\right]y_{k+1} -$$
$$-h\sum_{k=0}^{2n-3}\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_k)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + b(x_{2n-2}-x_k)\right]y_k + h^2\left\{f_{2n-2} - \left[a\frac{x_{2n-2}{}^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} +\right.\right.$$
$$\left.\left.+bx_{2n-2}\right]y_{10}\right\} \quad , \qquad (9)$$

$$y_{2n+1} = \left\{2 - h\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-2})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + b(x_{2n-1}-x_{2n-2})\right]y_{2n}\right\} + \left\{-1 -\right.$$
$$-h\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-3})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + b(x_{2n-1}-x_{2n-3})\right] + 2h\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-2})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} +\right.$$
$$\left.\left.+b(x_{2n-1}-x_{2n-2})\right]\right\}y_{2n-1} - h\sum_{k=0}^{2n-4}\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_k)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + b(x_{2n-1} -\right.$$
$$\left.-x_k)\right]y_{k+2} + 2h\sum_{k=0}^{2n-3}\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_k)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + b(x_{2n-1}-x_k)\right]y_{k+1} -$$
$$-h\sum_{k=0}^{2n-2}\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_k)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + +b(x_{2n-1}-x_k)\right]y_k + h^2\left\{f_{2n-1} - \left[a\frac{x_{2n-1}{}^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} +\right.\right.$$
$$\left.\left.+bx_{2n-1}\right]y_{10}\right\} \qquad (10)$$

Учитывая (9) в (10), получим:

$$y_{2n+1} = \left\{2 - h\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-2})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + b(x_{2n-1}-x_{2n-2})\right]\right\}\left\{\left\{2 -\right.\right.$$
$$\left.-h\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2n-3})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + b(x_{2n-2}-x_{2n-3})\right]\right\}y_{2n-1} + \left\{-1 -\right.$$
$$-h\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2n-4})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + b(x_{2n-2}-x_{2n-4})\right] + 2h\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2n-3})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} +\right.$$
$$\left.\left.+b(x_{2n-2}-x_{2n-3})\right]\right\}y_{2n-2} - h\sum_{k=0}^{2n-5}\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_k)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + b(x_{2n-2}-x_k)\right]y_{k+2} +$$

$$+2h\sum_{k=0}^{2n-4}\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_k)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_k)\right]y_{k+1}-h\sum_{k=0}^{2n-3}\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_k)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+\right.$$
$$\left.+b(x_{2n-2}-x_k)\right]y_k+h^2\left\{f_{2n-2}-\left[a\frac{x_{2n-2}{}^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+bx_{2n-2}\right]y_{10}\right\}\Bigg\}+\left\{-1-\right.$$
$$h\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-3})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_{2n-3})\right]+h\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-2})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+\right.$$
$$\left.\left.+b(x_{2n-1}-x_{2n-2})\right]\right\}y_{2n-1}-h\sum_{k=0}^{2n-4}\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_k)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_k)\right]y_{k+2}+$$
$$+2h\sum_{k=0}^{2n-3}\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_k)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_k)\right]y_{k+1}-h\sum_{k=0}^{2n-2}\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_k)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+\right.$$
$$\left.+b(x_{2n-1}-x_k)\right]y_k+h^2\left\{f_{2n-1}-\left[a\frac{x_{2n-1}{}^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+bx_{2n-1}\right]y_{10}\right\}\quad,$$

После группировки примет следующий вид:

$$y_{2n+1}=\left\{4-2h\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-2})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_{2n-2})\right]-\right.$$
$$-2h\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2n-3})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2n-3})\right]+h^2\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-2})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+\right.$$
$$\left.+b(x_{2n-1}-x_{2n-2})\right]\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2n-3})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2n-3})\right]-1-$$
$$-h\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-3})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_{2n-3})\right]+2h\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-2})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+\right.$$
$$\left.\left.+b(x_{2n-1}-x_{2n-2})\right]\right\}y_{2n-1}+\left\{-2+h\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-2})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+\right.\right.$$
$$\left.+b(x_{2n-1}-x_{2n-2})\right]-2h\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2n-4})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2n-4})\right]+$$
$$+h^2\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-2})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_{2n-2})\right]\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2n-4})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+\right.$$
$$\left.+b(x_{2n-2}-x_{2n-4})\right]+4\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2n-3})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2n-3})\right]-$$
$$-2h^2\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-2})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_{2n-2})\right]\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2n-3})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+\right.$$
$$\left.\left.+b\big((x_{2n-2}-x_{2n-3})\big)\right]y_{2n-2}\right\}-h\left\{2-h\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-2})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+b(x_{2n-1}-x_{2n-2})\right]\right\}\sum_{k=0}^{2n-5}\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_k)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_k)\right]y_{k+2}+$$
$$+2h\left\{2-h\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-2})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-x_{2n-2})\right]\right\}\sum_{k=0}^{2n-4}\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_k)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_k)\right]y_{k+1}-h\left\{2-\right.$$
$$\left.-h\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-2})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_{2n-2})\right]\right\}\sum_{k=0}^{2n-3}\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_k)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+\right.$$
$$\left.+b(x_{2n-2}-x_k)\right]y_k+h^2\left\{2-h\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-2})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-\right.\right.$$

$$-x_{2n-2})\Big]\Big\}\Big\{f_{2n-2}-\Big[a\frac{x_{2n-2}{}^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+\ bx_{2n-2}\Big]y_{10}\Big\}-$$
$$-h\sum_{k=0}^{2n-4}\Big[a\frac{(x_{2n-1}-x_k)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_k)\Big]y_{k+2}+$$
$$+2h\sum_{k=0}^{2n-3}\Big[a\frac{(x_{2n-1}-x_k)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_k)\Big]y_{k+1}-$$
$$-h\sum_{k=0}^{2n-2}\Big[a\frac{(x_{2n-1}-x_k)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_k)\Big]y_k+h^2\Big\{f_{2n-1}-$$
$$-\Big[a\frac{x_{2n-1}{}^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+bx_{2n-1}\Big]y_{10}\Big\} \qquad (11)$$

Таким образом получаем следующую систему разностных уравнений:

$$y_{2n}=\Big\{2-h\Big[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2n-3})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2n-3})\Big]\Big\}y_{2n-1}+\Big\{-1-$$
$$-h\Big[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2n-4})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+\ b(x_{2n-2}-x_{2n-4})\Big]+2h\Big[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2n-3})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+$$
$$+b(x_{2n-2}-x_{2n-3})\Big]\Big\}y_{2n-2}-\ h\sum_{k=0}^{2n-5}\Big[a\frac{(x_{2n-2}-x_k)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+\ b(x_{2n-2}-$$
$$-x_k)\Big]y_{k+2}+2h\sum_{k=0}^{2n-4}\Big[a\frac{(x_{2n-2}-x_k)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b\ (x_{2n-2}-x_k)\Big]y_{k+1}-$$
$$-h\sum_{k=0}^{2n-3}\Big[a\frac{(x_{2n-2}-x_k)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+\ +b(x_{2n-2}-x_k)\Big]y_k+h^2\Big\{f_{2n-2}-\ \Big[a\frac{x_{2n-2}{}^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+$$
$$+bx_{2n-2}\Big]y_{10}\Big\}$$

$$y_{2n+1}=\Big\{3-2h\Big[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2n-3})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2n-3})\Big]-$$
$$-h\Big[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-3})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_{2n-3})\Big]+h^2\Big[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-2})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+$$
$$b(x_{2n-1}--x_{2n-2})\Big]\Big[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2n-3})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2n-3})\Big]\Big\}y_{2n-1}+$$
$$\Big\{-2-\ -2h\Big[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2n-4})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2n-4})\Big]+\ 4h\Big[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2n-3})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+$$
$$+b(x_{2n-2}-x_{2n-3})\Big]+h^2\Big[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-2})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+$$
$$+b(x_{2n-1}-x_{2n-2})\Big]\Big[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2n-4})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2n-4})\Big]-$$
$$-2h^2\Big[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-2})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_{2n-2})\Big]\Big[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2n-3})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b\big((x_{2n-2}-$$
$$-x_{2n-3})\big)\Big]-\ h\Big[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-4})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_{2n-4})\Big]+$$
$$+2h\Big[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-3})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_{2n-3})\Big]\Big\}y_{2n-2}-\ h\Big\{2-$$
$$-h\Big[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-2})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_{2n-2})\Big]\Big\}\sum_{k=0}^{2n-5}\Big[a\frac{(x_{2n-2}-x_k)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+$$
$$b(x_{2n-2}--x_k)\Big]y_{k+2}+\ 2h\Big\{2-h\Big[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-2})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-$$
$$-x_{2n-2})\Big]\Big\}\sum_{k=0}^{2n-4}\Big[a\frac{(x_{2n-2}-x_k)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_k)\Big]y_{k+1}-\ h\Big\{2-$$

$$-h\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-2})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_{2n-2})\right]\Big\}\sum_{k=0}^{2n-3}\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_k)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+\right.$$
$$\left.+b(x_{2n-2}-x_k)\right]y_k-\ h\sum_{k=0}^{2n-5}\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_k)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_k)\right]y_{k+2}+$$
$$+2h\sum_{k=0}^{2n-4}\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_k)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}\ +b(x_{2n-1}-x_k)\right]y_{k+1}-h\sum_{k=0}^{2n-3}\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_k)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+\right.$$
$$\left.+b(x_{2n-1}-x_k)\right]y_k+h^2\left\{f_{2n-1}-\left[a\frac{{x_{2n-1}}^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+bx_{2n-1}\right]y_{10}\right\}+h^2\Big\{2-$$
$$-h\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-2})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_{2n-2})\right]\Big\}\Big\{f_{2n-2}-\left[a\frac{{x_{2n-2}}^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+\right.$$
$$\left.+bx_{2n-2}\right]y_{10}\Big\} \tag{12}$$

Примем следующие обозначения

$$W_0=\begin{pmatrix}y_0\\ y_1\end{pmatrix},\quad W_1=\begin{pmatrix}y_2\\ y_3\end{pmatrix},\ W_2=\begin{pmatrix}y_4\\ y_5\end{pmatrix},$$

$$W_{n-2}=\begin{pmatrix}y_{2n-4}\\ y_{2n-3}\end{pmatrix},\quad W_{n-1}=\ \begin{pmatrix}y_{2n-2}\\ y_{2n-1}\end{pmatrix},\qquad W_n=\begin{pmatrix}y_{2n}\\ y_{2n+1}\end{pmatrix}\quad .$$

Тогда уравнении (9) и (11) представим в виде следующих систем уравнений

$$W_n=\begin{pmatrix}A_{11}^{(n-1)}(\alpha,n,h) & A_{12}^{(n-1)}(\alpha,n,h)\\ A_{21}^{(n-1)}(\alpha,n,h) & A_{22}^{(n-1)}(\alpha,n,h)\end{pmatrix}W_{n-1}+$$
$$\sum_{k=0}^{n-2}\begin{pmatrix}A_{11}^{(k)}(\alpha,n,h) & A_{12}^{(k)}(\alpha,n,h)\\ A_{21}^{(k)}(\alpha,n,h) & A_{22}^{(k)}(\alpha,n,h)\end{pmatrix}W_k+\begin{pmatrix}f_{n1}(\alpha,n,h,y_1)\\ f_{n2}(\alpha,n,h,y_1)\end{pmatrix}\quad . \tag{13}$$

Здесь

$$A_{11}^{(n-1)}(\alpha,n,h)=1-h\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2n-4})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2n-4})\right]+$$
$$+2h\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2n-3})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}\ +b(x_{2n-2}-x_{2n-3})\right], \tag{14}$$

$$A_{12}^{(n-1)}(\alpha,n,h)=2-h\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2n-3})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2n-3})\right], \tag{15}$$

$$A_{21}^{(n-1)}(\alpha,n,h)=-2-2h\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2n-4})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2n-4})\right]+$$
$$+4h\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2n-3})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+\ b(x_{2n-2}-x_{2n-3})\right]-h\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-4})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+\right.$$
$$\left.+b(x_{2n-1}-x_{2n-4})\right]+2h\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-3})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+\ b(x_{2n-1}-x_{2n-3})\right]+$$
$$+h^2\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-2})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_{2n-2})\right]\Big\{\Big[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2n-4})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+\ +b(x_{2n-2}-$$
$$\left.-x_{2n-4})\right]-2\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2n-3})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}--x_{2n-3})\right]\Big\}\quad , \tag{16}$$

$$A_{22}^{(n-1)}(\alpha,n,h) = 3 - 2h\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2n-3})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + b(x_{2n-2} - x_{2n-3})\right] -$$
$$-h\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-3})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + b(x_{2n-1} - x_{2n-3})\right] + h^2\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-2})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} +\right.$$
$$\left.+b(x_{2n-1} - x_{2n-2})\right]\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2n-3})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + b(x_{2n-2} -\right.$$
$$\left.-x_{2n-3})\right], \tag{17}$$

$$A_{11}^{(k)}(\alpha,n,h) = -h\left\{\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2k-2})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + b(x_{2n-2} - x_{2k-2})\right] -\right.$$
$$-2\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2k-1})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + b(x_{2n-2} - x_{2k-1})\right] + \left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2k})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + +b(x_{2n-2} -\right.$$
$$\left.\left.-x_{2k})\right]\right\}, \quad k = \overline{1, n-2} \tag{18}$$

$$A_{11}^{(0)}(\alpha,n,h) = -h\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_0)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + b(x_{2n-2} - x_0)\right], \tag{19}$$

$$A_{12}^{(k)}(\alpha,n,h) = -h\left\{\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2k-1})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + b(x_{2n-2} - x_{2k-1})\right] -\right.$$
$$-2\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2k})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + b(x_{2n-2} - x_{2k})\right] + \left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2k+1})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + b(x_{2n-2} -\right.$$
$$\left.\left.-x_{2k+1})\right]\right\}, k = \overline{1, n-2} \tag{20}$$

$$A_{12}^{(0)}(\alpha,n,h) = 2h\left\{\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_0)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + b(x_{2n-2} - x_0)\right] - h\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_1)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} +\right.\right.$$
$$\left.\left.+b(x_{2n-2} - x_1)\right]\right\} \quad , \tag{21}$$

$$A_{21}^{(k)}(\alpha,n,h) = -h\left\{2 - h\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-2})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + b(x_{2n-1} -\right.\right.$$
$$\left.\left.-x_{2n-2})\right]\right\}\left\{\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2k-2})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + b(x_{2n-2} - x_{2k-2})\right] - 2\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2k-1})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} +\right.\right.$$
$$\left.\left.+b(x_{2n-2} - x_{2k-1})\right] + \left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2k})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + b(x_{2n-2} - x_{2k})\right]\right\} -$$
$$-h\left\{\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2k-2})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + b(x_{2n-1} - x_{2k-2})\right] - 2\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2k-1})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} +\right.\right.$$
$$\left.\left.+b(x_{2n-1} - x_{2k-1})\right] + \left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2k})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + b(x_{2n-1} - x_{2k})\right]\right\}, k =$$
$$\overline{1, n-2} \tag{22}$$

$$A_{21}^{(0)}(\alpha,n,h) = -h\left\{2 - h\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-2})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + b(x_{2n-1} -\right.\right.$$
$$\left.\left.-x_{2n-2})\right]\right\}\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_0)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + b(x_{2n-2} - x_0)\right] - h\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_0)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} +\right.$$
$$\left.+b(x_{2n-1} - x_0)\right], \tag{23}$$

$$A_{22}^{(k)}(\alpha,n,h) = -h\Big\{2 - h\Big[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-2})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + b(x_{2n-1} - \\ -x_{2n-2})\Big]\Big\}\Big\{\Big[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2k-1})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + b(x_{2n-2} - x_{2k-1})\Big] - 2\Big[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2k})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + \\ +b(x_{2n-2} - x_{2k})\Big] + \Big[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2k+1})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + b(x_{2n-2} - x_{2k+1})\Big]\Big\} - \\ -h\Big\{\Big[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2k-1})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + b(x_{2n-1} - x_{2k-1})\Big] - 2\Big[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2k})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + \\ +b(x_{2n-1} - x_{2k})\Big] + +\Big[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2k+1})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + b(x_{2n-1} - \\ -x_{2k+1})\Big]\Big\}, \qquad k = \overline{1, n-2} \tag{24}$$

$$A_{22}^{(0)}(\alpha,n,h) = h\Big\{2 - h\Big[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-2})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + b(x_{2n-1} - \\ -x_{2n-2})\Big]\Big\}\Big\{2\Big[a\frac{(x_{2n-2}-x_0)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + b(x_{2n-2} - x_0)\Big]\Big\} - \Big[a\frac{(x_{2n-2}-x_1)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + \\ +b(x_{2n-2} - x_1)\Big] + 2h\Big[a\frac{(x_{2n-1}-x_0)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + b(x_{2n-1} - x_0)\Big] - h\Big[a\frac{(x_{2n-1}-x_1)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + \\ +b(x_{2n-1} - x_1)\Big], \tag{25}$$

$$f_{n1}(\alpha,n,h,y_1) = h^2\Big\{f_{2n-2} - \Big[a\frac{{x_{2n-2}}^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + bx_{2n-2}\Big]y_{10}\Big\}, \tag{26}$$

$$f_{n2}(\alpha,n,h,y_1) = h^2\Big\{f_{2n-1} - \Big[a\frac{{x_{2n-1}}^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + bx_{2n-1}\Big]y_{10}\Big\} + h^2\Big\{2 - \\ -h\Big[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-2})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + b(x_{2n-1} - x_{2n-2})\Big]\Big\}\Big\{f_{2n-2} - \Big[a\frac{{x_{2n-2}}^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + \\ +bx_{2n-2}\Big]y_{10}\Big\}. \tag{27}$$

Теперь предполагая, что

$$\Psi_k = \begin{pmatrix} A_{11}^k(\alpha,n,h) & A_{12}^k(\alpha,n,h) \\ A_{21}^k(\alpha,n,h) & A_{22}^k(\alpha,n,h) \end{pmatrix}, \quad k = \overline{0, n-1} \quad , \tag{28}$$

$$F_n = \begin{pmatrix} f_{n1} \\ f_{n2} \end{pmatrix} \quad . \tag{29}$$

То из (13) получим:

$$W_n = \sum_{k=0}^{n-1} \Psi_k W_k + F_n, \qquad n \geq 1 \quad . \tag{30}$$

3. Приведение (30) к стандартному виду:

$W_1 = \Psi_0 W_0 + F_1$
$W_2 = \Psi_1 W_1 + \Psi_0 W_0 + F_2$

$W_3 = \Psi_2 W_2 + \Psi_1 W_1 + \Psi_0 W_0 + F_3 = \Psi_2 W_2 + \Psi_1(\Psi_0 W_0 + F_1) + \Psi_0 W_0 + F_3 =$
$= \Psi_2 W_2 + (\Psi_1 \Psi_0 + \Psi_0) W_0 + (\Psi_1 \mathrm{F}_1 + F_3)$
$W_4 = \Psi_3 W_3 + \Psi_2 W_2 + \Psi_1 W_1 + \Psi_0 W_0 + F_4 = \Psi_3 W_3 + \Psi_2(\Psi_1(\Psi_0 W_0 + F_1) +$
$+\Psi_0 W_0 + F_2) + \Psi_1(\Psi_0 W_0 + F_1) + \Psi_0 W_0 + F_4 = \Psi_3 W_3 + (\Psi_2 \Psi_1 \Psi_0 + \Psi_2 \Psi_0 +$
$+\Psi_1 \Psi_0 + \Psi_0) W_0 + (\Psi_2 \Psi_1 + \Psi_1) F_1 + \Psi_2 \mathrm{F}_2 + F_4$
.…………
. …………
. …………

$$W_n = \Psi_{n-1} W_{n-1} + \left(\left\{\sum_{k=1}^{n-2} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n-2} \prod_{j=1}^{k} \Psi_{i_{k+1-j}}\right\} \Psi_0 + \Psi_0\right) W_0 +$$
$$+ \left(\sum_{k=1}^{n-2} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n-2} \prod_{j=1}^{k} \Psi_{i_{k+1-j}} \mathrm{F}_{i_1}\right) + F_n, \qquad n \ge 2, \qquad (31)$$

Таким, образом уравнение колебательной системы (1) с жидкий демпфером и начальным условием (2) в отличие от [18], дискретизировано через классические разностные уравнения (31) [19].
Для вычисления координат объекта y_i предложен следующий алгоритм.

Алгоритм

1. Формируются параметры колебательной системы $\alpha, m, a, b, f, y_{10}$ из (1), (2),
2. Задается шаг дискретизация h интервала (x_0, l) с помощью точек $x_i = ih + x_0$.
3. Формируются параметры матричных коэффициентов , $A_{ij}^{(k)}(i, j = 1,2; k = \overline{0, n-1})$ из формул (14)-(25).
4. Вычисляется $f_i = f(x_i)$ и из (26), (27) и определяется f_{n1}, f_{n2}.
5. Формируются матрицы Ψ_k $(k = \overline{0, n-1})$ из (28) и F_n из (29).
6. Вычисляется

$$\chi_n = \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n-2} \prod_{j=1}^{k} \Psi_{i_{k+1-j}},$$
$$\Upsilon_{n_{i_1}} = \left(\sum_{k=1}^{n-2} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n-2} \prod_{j=1}^{k} \Psi_{i_{k+1-j}} \mathrm{F}_{i_1}\right). \qquad (32)$$

7. Движение объекта в точках x_n вычисляются с формулой $(n \ge 2)$

$$W_n = \Psi_{n-1} W_{n-1} + (\chi_n \Psi_0 + \Psi_0) W_0 + \Upsilon_{n_{i_1}} + F_n \qquad (33)$$

и определяется координата объекта y_n.

4. Оптимальный выбор шага дискретизации и сравнение с классическим результатом

Поскольку нахождение y_i зависит от выбора h, приведем следующий алгоритм для его нахождения. Пусть задается $h_j (j = 1,2,\dots)$ и обозначим соответствующее решение $\widetilde{y_{nj}}$. Рассмотрим следующую разность для h_j и h_{j-1}

$$l_j = \max_b |y_{nj} - y_{nj-1}| \tag{34}$$

Отметим, что при выборе h_j из (34) проверяется условие $l_{j+1} < l_j$. Если условие удовлетворяется, процесс вычислений продолжается, иначе, т.е. при $l_{j+1} > l_j$ процесс вычисления останавливается.

Таким образом, можно добавить в выше приведенный алгоритм следующий шаг.

8. Если из (34) $l_{j+1} < l_j$ условие удовлетворяется, то вычисления продолжаются, иначе, процесс вычисления останавливается.

Теперь покажем, что при $\alpha = 1$ полученный результат из формулы (30) совпадает с классическим.

Действительно из (30) при $\alpha = 1$ для y_{2n} получим

$$\begin{aligned} y_{2n} &= (2 - ah - bh^2) y_{2n-1} - (1 - ah) y_{2n-2} + h(a + 2bhn - bh) y_1 - \\ &- h(a + 2bhn - 2bh) y_0 + h^2 [f_{2n-2} - (a + bx_{2n-2}) y_{10}] \end{aligned}.$$

который при $n = 1$ примет вид

$$y_2 = 2y_1 - y_0 + h^2 [f_0 - (a + bx_0) y_{10}] \quad . \tag{35}$$

Возвращаясь к исходной постановке задачи (1), (2) при $\alpha = 1$ после дискретизации Эйлера, получим

$$y_{n+2} + (ah - 2) y_{n+1} + (bh^2 - ah + 1) y_n = h^2 f_n .$$

При $n = 0$ имеем

$$y_2 + (ah - 2) y_1 + (bh^2 - ah + 1) y_0 = h^2 f_0 \quad . \tag{36}$$

Таким образом, полученные формулы (35) и (36) равны. Аналогично можно доказать совпадение следующих уравнений.

Заключение В данной работе впервые показывается, что дискретизация задачи (1), (2) приводится к виду (30), который является обобщением классического случая при $\alpha = 1$. Приводится оптимизация выбора шага дискретизации и показывается что, при $\alpha = 1$ результаты совпадают с классическими случаями.

Авторы выражают благодарность академику Ф.А. Алиеву за постановку задачи, оказанную помощь и ценные советы при исследовании работ и рекомендации по оформлению статьи.

Литература

1. Aliev F. A, Aliev N.A., Velieva N.I., Gasimova K.G., Mamedova Y.V. Method of discretizing of fractional-derivative linear systems of ordinary differential equations with constant coefficients, arXiv preprint arXiv:1903.06468 2019/3/15 , https://arxiv.org/abs/1903.06468
2. Aliev F. A. , Abbasov A. N., Mutallimov M. M. Algorithm for solution of the problem of optimization of the energy expenses at the exploitation of chinks by subsurfase - pump installations, Appl. Comput. Math., 2004, V/3, N.1., pp. 2-9
3. Aliev F.A., Aliev N.A., Safarova N.A., Gasimova K.G., Velieva N.I. Solution of Linear Fractional-Derivative Ordinary Differential Equations with Constant Matrix Coefficients, Applied and Computational Mathematics An International Journal, 2018, V.17,N.3, pp.317-322
4. Aliev F.A., Aliev N.A., Safarova N.A., Gasymova K.G. Transformation of the Mittag-Lefler Function to an Exponential function and some its applications to problems with a fractional derivative, Proceedings of the 6th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications, COIA- 2018, Baku, Azerbaijan, 2018, 11-13 July, pp.52-54
5. Aliev F.A., Arcasoy C.C., Larin V.B., Safarova N.A .Synthesis problem for periodic systems by static output feedback Applied and Computational Mathematics, V.4, N.2, pp.102-113. 12.
6. Aliev F.A., Bordyug B.A., Larin V.B. Calculation of the optimal stationary regulator, Soviet J. Comput. System Sci, 1985.
7. Aliev F.A., Bordyug B.A., Larin V.B. H 2-optimization and a State Space Method for Synthesis of Optimal Regulators Elm Publishers, Baku, 1991, 372 p.
8. Aliev F.A., Hajieva N.S., Namazov A.A., Safarova N.A. The identification problem for defining the parameters of discrete dynamic system, Int.Applied Mechanics , 2018, V.55 , N.1, pp.28-135
9. Aliev F.A., Ismailov N.A. The optimization of the periodic system with feedback on output variable Dokl. Akad. Nauk of Azerbaijan, 44 (4), pp.149-150.

10. Aliev F.A., Ismailov N.A., Namazov A.A., Rajabov M.F., Safarova N.A., . Mamedova Y.V. Asymptotic Method for Solution of Identification Problem of the Nonlinear Dynamic Systems, Filomat, 2018, V.32 N.3, pp. 1025-1033
11. Aliev F.A., Larin V.B. A historical perspective on the parametrization of all stabilizing feedback controllers, Applied and computational mathematics, 2019,V.18, N.3, pp.326-328
12. Aliev F.A., Larin V.B. Optimization of Linear Control Systems: Analytical Methods and Computational Algorithms 1998, 272 p.
13. Aliev F.A., Safarova N.A. The correlations for defining of the matrix coefficients of the discrete periodic optimal regulator to output, Baku University News, 2007, N.2, pp.89-94.
14. Aliev F.A., Velieva N.I .Algorithm for solving the problem of optimal stabilization by output and their application, IFAC-PapersOnLine , 2018, V.51,N.30, pp.323-330
15. Aliev F.A., Velieva N.I., Safarova N.A., Niftili A.A. Methods for solving of stabilization problem of the discrete periodic system with respect to output variable, Appl. Comput. Math., V.6 N.1, pp.27-38.
16. Ashuraliev A.A. Survey of results in the theory of fractional spaces generated by positive operators. TWMS J. Pure and Applied Mathematics, V.6, N2, 2015, pp.129-157.
17. Bonilla B., Rivero M., Trujillo J.J. On Systems of Linear Fractional Differential Equations with constant coefficients // Appl. Math. And Computation. 2007, V.187, pp. 68-78.
18. Monje C.A., Chen Y.Q, Vinagre B.M, Xue D., Feliu V. Fractional –Order Systems and Controls Fundamentals and Applications, Springer, London, 2010, 414 p.
19. Odibat Z.M. Analytic study on linear systems of fractional differential equations, // Computers & Mathematics with Applications 59 (3), pp.1171-1183. 5.
20. Samko S.G, Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional integrals and derivatives: Theory and applications, Gordon and Breach Science publishers, Yverdon, Switzerland, 1993, 780 p.
21. Sirvastava H.M, Aliev N.A., Mammadova G.H., Aliev F.A. Some remarks on the paper entitled Fractional and operational Reumarks with generalized fractional derivative operators and Mittag-Leffler type functions by Tomovsky et al.,TWMS J. Pure and Appl. Math., V.8, N.1, 2017, pp.112-114.

22. Sirvastava H.M., Some families of Mittag-Leffler type functions and associated operators of fractional calculus (Survey), TWMS J. Pure and Appl. Math., V.7, N2, 2016, pp.123-145.
23. Алиев Ф. А. Задача оптимального управления линейной системой с неразделенными двухточечными краевыми условиями. // Дифференциальные уравнения, 1986, № 2, с. 345-347.
24. Алиев Ф. А. Задача оптимизации с двухточечными краевыми условиями, Известия АН СССР, сер. техн. кибернетика, 1985, N.6., 138 с.
25. Алиев Ф.А. Методы решения прикладных задач оптимизации динамических систем, Элм, Баку, 1989, 320 с.
26. Алиев Ф.А., Алиев Н.А., Муталлимов М.М., Намазов А.А. Метод идентификации для определения порядка дробной производной колебательной системы, Proceedings of IAM, 2019 ,V.8, N.1, , с. 3-13.
27. Алиев Ф.А., Алиев Н.А., Сафарова Н.А., Велиева Н.И. Алгоритм решения задачи коши для стационарных линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка, Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, 2018, V. 7, N.2, pp.234-246
28. Алиев Ф.А., Алиев Н.А., Сафарова Н.А., Гасымова К.Г., Раджабов М.Ф., Аналитическое конструирование регуляторов для систем с дробными производными, Proceedings of IAM,V.6, N.2, 2017, с. 252-265.
29. Бордюг В.Л., Ларин В.Б., Тимошенко А.Г. Задачи управления шагающими аппаратами. Киев, Наук. думка, 1985, 264 с.
30. Гельфанд И. М., Левитан Б. М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции, Изв. АН СССР. Сер. Матем., 1951, Т.15, 4, с.309–360.
31. Ларин В.Б. Управление шагающими аппаратами. Киев: Наук. думка, 1980, 168 с.
32. Михотин В. Д., Шахов Э. К. Дискретизация и восстановление сигналов в информационно-измерительных системах. Учеб. пособие. Пенза: Изд-во ППИ, 1982, 92 с.

DISCRETIZATION METHOD ON MOVEMENT EQUATION OF THE OSCILLATING SYSTEM WITH LIQUID DUMPERS

N.A.Aliev[1], N.İ.Velieva[1,3], K.G.Gasımova[2], A.F.Resulzade[3]

[1]Applied Mathematic İnstitute, BSU, Baku, Azerbaijan
[2] Azerbaijan Pedagogical Universitet, Baku, Azerbaijan
[3] Azerbaijan Technical Universitet, Baku, Azerbaijan
e-mail: nailavi@rambler.ru, resulzadeaynur@gmail.com

Abstract. We consider oscillatory systems inside a Newtonian fluid, where, contrary to the classical approach, the mathematical model of the damper has a fractional derivative. Owing to non-locality, the definition of the fractional derivative here from the continuous variant first passes to the discrete model of the oscillatory system and describes the motion of the classical difference equations. Using this discrete model, an algorithm is derived (based on statistical data) to determine the order of the liquid damper.

Key words: oscillatory system, liquid damper, discrete model, fractional derivative, statistical data, least squares method.
AMS Subject Classification: 49J15, 49J35.

References

1. Aliev F. A, Aliev N.A., Velieva N.I., Gasimova K.G., Mamedova Y.V. Method of discretizing of fractional-derivative linear systems of ordinary differential equations with constant coefficients, arXiv preprint arXiv:1903.06468 2019/3/15 , https://arxiv.org/abs/1903.06468
2. Aliev F. A. , Abbasov A. N., Mutallimov M. M. Algorithm for solution of the problem of optimization of the energy expenses at the exploitation of chinks by subsurfase - pump installations, Appl. Comput. Math., 2004, V/3, N.1., pp. 2-9
3. Aliev F.A., Aliev N.A., Safarova N.A., Gasimova K.G., Velieva N.I. Solution of Linear Fractional-Derivative Ordinary Differential Equations with Constant Matrix Coefficients, Applied and Computational Mathematics An International Journal, 2018, V.17,N.3, pp.317-322
4. Aliev F.A., Aliev N.A., Safarova N.A., Gasymova K.G. Transformation of the Mittag-Lefler Function to an Exponential function and some its applications to problems with a fractional derivative, Proceedings of the 6th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications, COIA- 2018, Baku, Azerbaijan, 2018, 11-13 July, pp.52-54
5. Aliev F.A., Arcasoy C.C., Larin V.B., Safarova N.A .Synthesis problem for periodic systems by static output feedback Applied and Computational Mathematics, V.4, N.2, pp.102-113. 12.
6. Aliev F.A., Bordyug B.A., Larin V.B. Calculation of the optimal stationary regulator, Soviet J. Comput. System Sci, 1985.

7. Aliev F.A., Bordyug B.A., Larin V.B. H 2-optimization and a State Space Method for Synthesis of Optimal Regulators Elm Publishers, Baku, 1991, 372 p.
8. Aliev F.A., Hajieva N.S., Namazov A.A., Safarova N.A. The identification problem for defining the parameters of discrete dynamic system, Int.Applied Mechanics , 2018, V.55 , N.1, pp.28-135
9. Aliev F.A., Ismailov N.A. The optimization of the periodic system with feedback on output variable Dokl. Akad. Nauk of Azerbaijan, 44 (4), pp.149-150.
10. Aliev F.A., Ismailov N.A., Namazov A.A., Rajabov M.F., Safarova N.A., . Mamedova Y.V. Asymptotic Method for Solution of Identification Problem of the Nonlinear Dynamic Systems, Filomat, 2018, V.32 N.3, pp. 1025-1033
11. Aliev F.A., Larin V.B. A historical perspective on the parametrization of all stabilizing feedback controllers, Applied and computational mathematics, 2019,V.18, N.3, pp.326-328
12. Aliev F.A., Larin V.B. Optimization of Linear Control Systems: Analytical Methods and Computational Algorithms 1998, 272 p.
13. Aliev F.A., Safarova N.A. The correlations for defining of the matrix coefficients of the discrete periodic optimal regulator to output, Baku University News, 2007, N.2, pp.89-94.
14. Aliev F.A., Velieva N.I .Algorithm for solving the problem of optimal stabilization by output and their application, IFAC-PapersOnLine , 2018, V.51,N.30, pp.323-330
15. Aliev F.A., Velieva N.I., Safarova N.A., Niftili A.A. Methods for solving of stabilization problem of the discrete periodic system with respect to output variable, Appl. Comput. Math., V.6 N.1, pp.27-38.
16. Ashuraliev A.A. Survey of results in the theory of fractional spaces generated by positive operators. TWMS J. Pure and Applied Mathematics, V.6, N2, 2015, pp.129-157.
17. Bonilla B., Rivero M., Trujillo J.J. On Systems of Linear Fractional Differential Equations with constant coefficients // Appl. Math. And Computation. 2007, V.187, pp. 68-78.
18. Monje C.A., Chen Y.Q, Vinagre B.M, Xue D., Feliu V. Fractional –Order Systems and Controls Fundamentals and Applications, Springer, London, 2010, 414 p.

19. Odibat Z.M. Analytic study on linear systems of fractional differential equations, // Computers & Mathematics with Applications 59 (3), pp.1171-1183. 5.
20. Samko S.G, Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional integrals and derivatives: Theory and applications, Gordon and Breach Science publishers, Yverdon, Switzerland, 1993, 780 p.
21. Sirvastava H.M, Aliev N.A., Mammadova G.H., Aliev F.A. Some remarks on the paper entitled Fractional and operational Reumarks with generalized fractional derivative operators and Mittag-Leffler type functions by Tomovsky et al.,TWMS J. Pure and Appl. Math., V.8, N.1, 2017, pp.112-114.
22. Sirvastava H.M., Some families of Mittag-Leffler type functions and associated operators of fractional calculus (Survey), TWMS J. Pure and Appl. Math., V.7, N2, 2016, pp.123-145.
23. Aliev F. A. Zadacha optimal'nogo upravlenija linejnoj sistemoj s nerazdelennymi dvuhtochechnymi kraevymi uslovijami. // Differencial'nye uravnenija, 1986, № 2, s. 345-347 (Aliev F.A. The problem of optimal control of a linear system with unseparated two-point boundary conditions. // Differential equations,1986, No.2, p.345-347.) (in Russian)
24. Aliev F. A. Zadacha optimizacii s dvuhtochechnymi kraevymi uslovijami, Izvestija AN SSSR, ser. tehn. kibernetika, 1985, N.6., 138 c. (Aliev F.A. Optimization problem with unseparated two-point boundary conditions // News AN USSR, cybernetics, 1985, No.6, p. 138-146) (in Russian).
25. Aliev F.A. Metody reshenija prikladnyh zadach optimizacii dinamicheskih sistem, Jelm, Baku, 1989, 320 s. (Aliev F.A. Methods for solving applied problems of optimizing dynamic systems. Baku: Elm, 1989, 320 p) (in Russian).
26. Aliev F.A., Aliev N.A., Mutallimov M.M., Namazov A.A. Metod identifikacii dlja opredelenija porjadka drobnoj proizvodnoj kolebatel'noj sistemy, Proceedings of IAM, 2019 ,V.8, N.1, , c. 3-13. (F.A. Aliev, N.A. Aliev, M.M. Mutallimov, A.A. Namazov Identification method for defining the order of the fractional derivative oscillatory system Proceedings of IAM, 2019 ,V.8, N.1, , c. 3-13.) (in Russian).
27. Aliev F.A., Aliev N.A., Safarova N.A., Velieva N.I. Algoritm reshenija zadachi koshi dlja stacionarnyh linejnyh sistem obyknovennyh differencial'nyh uravnenij drobnogo porjadka, Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, 2018, V. 7, N.2, pp.234-246 (Aliev F.A., Aliev N.A., Safarova N.A., Velieva N.I. Algorithm for solving the Cauchy

problem for stationary systems of fractional order linear ordinary differential equations, Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, 2018, V. 7, N.2, pp.234-246) (in Russian).

28. Aliev F.A., Aliev N.A., Safarova N.A., Gasymova K.G., Radzhabov M.F., Analiticheskoe konstruirovanie reguljatorov dlja sistem s drobnymi proizvodnymi, Proceedings of IAM,V.6, N.2, 2017, c. 252-265. (F. A. Aliev, N.A. Aliev, N.A. Safarova, K.G. Gasimova , M.F. Radjabov Analytical construction of regulators for systems with fractional derivatives) (in Russian).
29. Bordjug V.L., Larin V.B., Timoshenko A.G. Zadachi upravlenija shagajushhimi apparatami. Kiev, Nauk. dumka, 1985, 264 s. (Bordyug V.L., Larin V.B., Timoshenko A.G. The control problem of walking apparatus. Kiev: Nauk.Dumka, 1985, 264 p.) (in Russian).
30. Gel'fand I. M., Levitan B. M. Ob opredelenii differencial'nogo uravnenija po ego spektral'noj funkcii, Izv. AN SSSR. Ser. matem., 1951, T.15, 4, c.309–360. (Gel'fand I. M., Levitan B. M, On the determination of a differential equation from its spectral function, Izv. USSR Academy of Sciences. Ser. Matem 1985, 264 p.) (in Russian).
31. Larin V.B. Upravlenie shagajushhimi apparatami. Kiev: Nauk. dumka, 1980, 168 s. (Larin V.B. The control of walking apparatus. Kiev: Nauk.Dumka, 1980, 168 p.) (in Russian).
32. Mihotin V. D., Shahov Je. K. Diskretizacija i vosstanovlenie signalov v informacionno-izmeritel'nyh sistemah. Ucheb. posobie. Penza: Izd-vo PPI, 1982, 92 s. (Mikhotin V.D., Shakhov Je. K. Discretization and restoration of signals in information-measuring systems. Textbook allowance. Penza: Publishing House of PPI, 1982, 92 pp.) (in Russian).